

BILLIARDTRAJEKTORIEN

MARTIN MÖLLER

GRUNDLAGEN UND ÜBUNGSAUFGABEN

Die Schwierigkeiten beim Billiardspielen als Freizeitbeschäftigung oder als Wettkampf bestehen darin, das Stoßverhalten von vielen Kugeln (drei beim Dreiband und noch mehr beim Pool oder Snooker) vorherzuberechnen, die Konsequenzen von Drall (Effet) und Tischreibung einzubeziehen und die Berechnungen möglichst präzise in einer mechanischen Stoßbewegung des Kös umzusetzen.

Bei einem mathematischen Billiard vereinfacht man einiges davon drastisch: Wir nehmen an, dass es keine Reibung gibt. Wir nehmen an, dass es nur einen Ball gibt, also auch keine Stoßprozesse außer der Reflektion an der Bande. Wir nehmen außerdem an, dass der Ball nur eine beliebig kleine Ausdehnung hat, wie ein Punkt. Dafür erhöht man die Komplexität in zwei Aspekten: Zum einen ist der 'Billardtisch' nicht unbedingt ein Rechteck, sondern es sind auch kompliziertere geometrische Objekte zugelassen. Andererseits will man auch verstehen, wie Billiardtrajektorien sich über lange Zeit verhalten (gibt es Regionen des Billardtisches, in denen sie sich bevorzugt aufhalten?) oder ob sie periodisch sind.

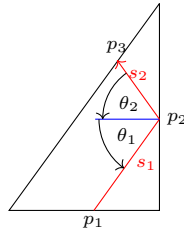


ABBILDUNG 1. Einfallswinkel θ_1 gleich Ausfallswinkel θ_2 .

Definition 1. Ein rationales Polygon P ist ein Polygon dessen Innenwinkel¹ alle- samt rationale Vielfache von π sind.

Eine Billiardtrajektorie (Billiardbahn) startend in einem Punkt $p \in P$ und endend in $q \in P$ ist definiert durch eine Liste von $L \geq 2$ Punkten $(p_1, \dots, p_L)$ mit folgenden Eigenschaften :

- Der erste Punkt ist $p_1 = p$, der letzte Punkt $p_L = q$.
- Alle anderen Punkte $p_2, \dots, p_{L-1}$ liegen am Rand von P , aber nicht in einer Ecke von P .
- Die gerichteten Strecken $s_i = [p_i, p_{i+1}]$ für $i = 1, \dots, L - 1$ haben die Eigenschaft 'Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel', siehe Bild 1.

¹Alle Winkel sind in diesem Text im Bogenmaß angegeben. Alternativ kann man auch sagen, dass ein Polygon rational ist, wenn die Winkel im Gradmaß rationale Zahlen sind.

Eine periodische Billiardtrajektorie ist eine Billiardtrajektorie, die in einem Punkt p im Inneren von P startet, im selben Punkt p endet und bei der das erste und letzte Segment die gleiche Richtung haben (also p im Innern des Segments $[p_{L-1}, p_2]$ liegt).

Insbesondere kann eine Billiardtrajektorie in einer Ecke höchstens enden: ein Reflektieren in einer Ecke kann nicht sinnvoll definiert werden.

Eine Billiardtrajektorie überkreuzt sich typischerweise nach wenigen Reflektionen selbst. Das kann auf der Suche nach periodischen Billiardtrajektorien ganz schön lästig sein und ist auch ein ersthaftes konzeptionelles Hindernis, wenn man abschätzen will, wie viele periodische Billiardtrajektorien ein Polygon von gegebener (großer) Länge hat. Folgende Konstruktion hilft diese Situation zu verbessern.

Nehmen wir das Dreieck in Bild 1 als Beispiel. Das Reflektionsgesetz "Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel" führt dazu, dass wenn man statt der Trajektorie das Dreieck reflektiert, zwei aufeinanderfolgende Segmente der Billiardtrajektorie zum Teil einer Geraden werden.

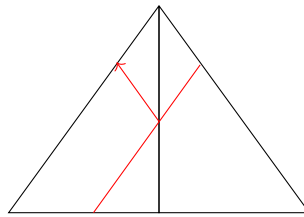


ABBILDUNG 2. Entfaltung von Trajektorien durch Reflektion des Polygons.

An einem weiteren Beispiel, dem L -förmigen Polygon in Bild 3 rechts oben illustrieren wir, wie sich dieser Prozess sukzessive fortsetzt. Betrachten wir die Billiardtrajektorie, die mit dem Segment mit Pfeil startet. Sobald sie auf die Seite a trifft, reflektieren wir das L und erhalten die Kopie links oben.

Damit wir wie in Bild 2 eine Gerade erhalten, müssen wir die zwei Kopien entlang der Kanten a und a' verkleben. Verfolgen wir die Trajektorie in der Kopie links oben weiter. Sobald sie auf die Kante b trifft, reflektieren wir das L wieder, erhalten die Kopie links unten. Wenn wir die Kante b mit b' verklebt haben, so bilden die drei Segmente der ursprünglichen Billiardtrajektorie zu einer Geraden in der zusammengeklebten Fläche. Der Leser wird sofort erkennen, dass wir zur weiteren Fortsetzung an der Geraden c spiegeln müssen und die Reflektionskopie rechts unten entlang der Kante c' ankleben müssen. Hört dieser Prozess weitere Reflektionskopien zu erzeugen irgendwann auf? In der Tat sind wir in diesem Beispiel bereits fertig!

Was wäre, wenn wir vom gleichen Startpunkt nach rechts unten gestartet wären? Dann brauchen wir auch die Reflektionskopie rechts unten, verklebt entlang der Kanten d und d' . Und wenn wir nach rechts oben gestartet wären? Dann brauchen wir die Verklebung entlang e und e' . Direkt horizontal nach rechts? Dann brauchen wir f und f' . Der Leser wird auch für die anderen Buchstaben einen Billiardpfad finden, der klarmacht, dass die Seite mit der entsprechenden Seite mit gestrichenem Symbol verklebt werden muss, damit aus der Billiardtrajektorie eine Gerade wird.

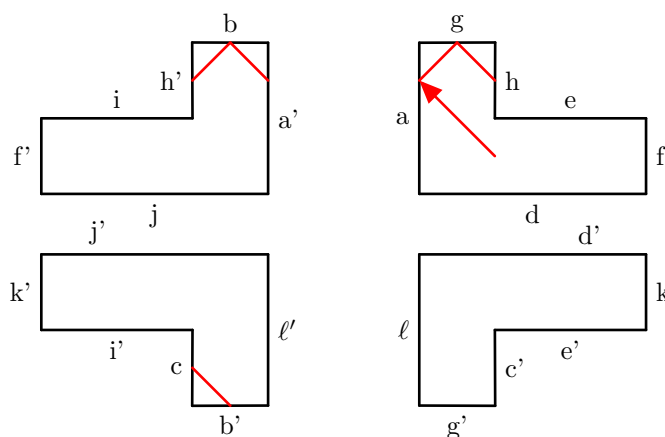


ABBILDUNG 3. Ein L-förmiges Polygon

Das Verkleben ist hier als abstrakte Konstruktion gedacht. Sicher kann der Leser die Polygone aus Papier ausschneiden und die Seiten a, d, j, ℓ bequem mit der Partnerseite verkleben. Die Seiten f, k kann man auch noch verkleben, indem man das Papier entsprechend biegt. Aber mit jeder weiteren Seite wird sich das Papier mehr gegen entsprechende Verklebung wehren und die konkrete Konstruktion mit Klebeband unmöglich werden. (Nebenbemerkung: Warum? An welchen Stellen scheitert es?)

Die so verklebte Fläche wird Entfaltungsfläche des Polygons genannt. Wir geben die allgemeine Definition der Entfaltungsfläche in Form eines Konstruktionsalgorithmus an.

Definition 2. Die Entfaltungsfläche $E(P)$ zum einem rationalen Polygon P , ist eine Menge von Polygonen, die entlang ihrer Kanten verklebt sind und die man wie folgt erhält:

- (1) Wir starten mit $E(P) = \{P\}$ und allen Seiten von P unverklebt.
- (2) Solange es in $E(P)$ ein Polygon Q mit einer unverklebten Seite a gibt, führe folgende Konstruktion durch:
 - (2.1) Sei Q'_a das Polygon, das man aus Q durch Reflektion an a erhält. Sei a' die Seite von Q'_a , die aus a durch Reflektion hervorgegangen ist.
 - (2.2) Ist Q'_a ein Translat (also eine Verschiebung ohne Rotation) eines Polygons R in $E(P)$, und bildet diese Translation die Seite a' auf die Seite r von R ab, so verklebe die Seite a von Q mit der Seite r von R .
 - (2.3) Ist Q'_a nicht Translat eines Polygons R in $E(P)$, so nimm Q'_a zu $E(P)$ hinzu und verklebe die Seite a mit der Seite a' .

(Die Entfaltungsfläche ist eine *abstrakte* Fläche, wie die Oberfläche einer Kugel, eines Doughnuts, einer Brezel. D.h. sie ist im Gegensatz zu P nicht in die Ebene eingebettet. Sie könnte in den uns umgebenden Raum eingebettet werden, aber eine solche Einbettung spielt keine Rolle und wir interessieren uns daher nicht dafür.)

Beispiel 3. Die Entfaltungsfläche des Dreiecks P mit den Winkeln $(\pi/2, \pi/5, 3\pi/10)$ besteht aus 20 Dreiecken wie in Bild 4, wobei die Seiten a mit a' , die Seite b mit b'

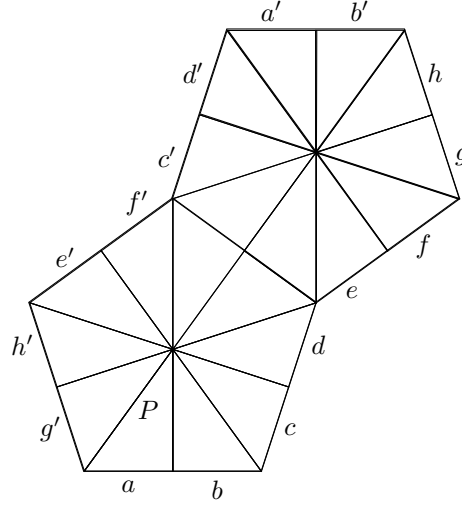


ABBILDUNG 4. Die Entfaltungsfläche zu einem $(\pi/2, \pi/5, 3\pi/10)$ -Dreieck

usw. miteinander verklebt werden, sodass eine Fläche ohne Rand entsteht. (Viele der Verklebungen von Seiten haben wir bereits durchgeführt, indem wir die Dreiecke benachbart in die Ebene gezeichnet haben.)

Die Konstruktion der Entfaltungsfläche ist in der Tat ein Algorithmus, d.h. ein Verfahren, das nach endlich vielen Schritten endet.

Proposition 4. *Ist P ein rationales Polygon, so besteht die Entfaltungsfläche $E(P)$ aus endlich vielen Polygonen.*

Beweis. Wir können die Seiten von P , sagen wir gegen Uhrzeigersinn, mit $1, \dots, K$ durchnummerieren und orientieren diese Seiten gegen den Uhrzeigersinn. Wir beobachten, dass eine Reflektionskopie von P bis auf Translation eindeutig durch die Steigung θ_1 der ersten Seite (mit der gegebenen Orientierung) festgelegt ist. Wir können durch Drehen von P annehmen, dass die erste Seite von P horizontal ist (also $\theta_1 = 0$), denn eine solche Drehung dreht alle Reflektionskopien in $E(P)$, verändert aber nicht die Anzahl der Kopien, die wir für $E(P)$ benötigen.

Da P ein rationales Polygon ist, können wir annehmen, dass die Innenwinkel α_i (zwischen der i -ten und der $i+1$ -ten Seite) von der Form $\alpha_i = a_i\pi/n$ mit $a_i \in \mathbb{N}$ sind, indem wir die Winkel (im Bogenmaß) auf einen Hauptnenner bringen. Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben, dass in jeder Reflektionskopie die erste Seite einen Winkel der Gestalt $\theta_1 = t\pi/n$ für ein $t \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq t \leq 2n$ gegen die positive Horizontale hat, denn dann gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für t gibt. Die Schranken für t sind dabei offensichtlich, da es sich um einen Winkel gegen die Horizontale handelt. Wichtig ist die Gestalt als Vielfaches von π mit Nenner n . Im Beweis zeigen wir nebenbei mit, dass *alle* Seiten einen Winkel $\theta_k = t_k\pi/n$ für $t_k \in \mathbb{N}$ gegen die positive Horizontale bilden.

Zu Beginn bei P ist $\theta_1 = 0$, also von der Form wie behauptet und allgemeiner ist $\theta_k = (\sum_{j=1}^{k-1} (n - a_j))\pi/n$ von der Form wie behauptet, da $a_j \in \mathbb{N}$. Die entscheidende Beobachtung ist, dass wenn wir an der ℓ -ten Seite mit Winkel $t_\ell\pi/n$ (gegen die

positive Horizontale) reflektieren und vor der Reflektion die Seiten $\theta_k = t_k\pi/n$ den Winkel gegen die positive Horizontale bilden, dann hat die reflektierte Seite den Winkel (machen Sie eine Zeichnung oder verwenden Sie das Video!)

$$\theta'_k = (t_\ell - (t_k - t_\ell))\pi/n = (2t_\ell - t_k)\pi/n$$

gegen die positive Horizontale, was wieder von behaupteten Gestalt ist. $\square$

(Wer mit dem Formalismus vertraut ist, wird erkennen, dass dem Endlichkeitsatz ein Induktionsbeweis zugrundeliegt.)

Übungsaufgabe 5. Betrachte das Dreieck mit Winkeln $(\pi/2, \pi/N, (N-2)\pi/2N)$. Aus wie vielen Teilen besteht dessen Entfaltungsfläche?

Betrachte eine regelmäßiges N -gon für $N \geq 3$. Aus wie vielen solchen N -gons besteht dessen Entfaltungsfläche?

Betrachte ein "eckiges Hufeisen", ein U -förmiges Polygon, bei dem alle Innenwinkel rechte Winkel sind. Aus wie vielen solchen Hufeisen besteht dessen Entfaltungsfläche?

Schließlich halten wir noch formal fest, was wir mit der Definition der Entfaltungsfläche wirklich bezweckt haben. Auf der Entfaltungsfläche gibt es spezielle Punkte, genannt *Singularitäten*, die den Eckpunkten des Polygons und ihren Reflektionskopien entsprechen. Abseits dieser Punkte sieht die Entfaltungsfläche (zwar nicht als Ganzes, aber doch immerhin) in einer Umgebung jeden Punktes aus wie die Ebene $\mathbb{R}^2$. Man kann also von *Geraden* in $E(P)$ sprechen.² Das sind Wege in $E(P)$, die nicht durch Singularitäten gehen und in einer Umgebung jeden Punktes wie eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ aussehen.

Proposition 6. Zu jeder Billiardtrajektorie in P gehört genau eine Gerade in $E(P)$ mit Startpunkt im Originalpolygon $P \subset E(P)$. Umgekehrt gehört zu jeder Geraden in $E(P)$ mit Startpunkt in P eine Billiardtrajektorie. Diese zwei Abbildungen sind Umkehrabbildungen voneinander.

Beweis. Wir starten mit einer Billiardtrajektorie $(p_1, \dots, p_L)$ und ordnen dieser zunächst das Segment s_1 startend in p_1 und endend in p_2 zu. Ist $L > 2$, so ist p_2 auf einer Seite a_1 von P und wir können die Billiardtrajektorie $(p_2, \dots, p_L)$ an a_1 reflektieren, nennen wir die Punkte $(p'_2, \dots, p'_L)$. Diese liegen in dem an s_1 reflektierten Polygon, nennen wir es $P_2 \subset E(P)$. Das Segment $s'_2 = [p'_2, p'_3]$ setzt s_1 geradlinig fort, wie in Bild 2 illustriert. Ist $L > 3$, so ist p_3 auf einer Seite a_2 von P_2 und wir setzen den Prozess durch Reflektion an p_3 fort, usw. bis wir alle Segmente von P abgearbeitet haben.

Sei umgekehrt eine Gerade g in $E(P)$ mit Startpunkt $p_1 \in P \subset E(P)$ gegeben. Wir 'falten' die Gerade zurück nach P : Seien $p_2, \dots, p_L$ die Punkte, an denen g den Rand einer Reflektionskopie von P trifft und p_L der Endpunkt von g . Ist $L > 2$, so liegt p_2 auf einer Seite a_1 von P . Wir reflektieren die Gerade $[p_2, p_L]$ an a_1 und erhalten so eine Gerade g' , deren Startpunkt p'_2 und Anfangssegment in P liegt. Die Segmente $[p_1, p_2]$ und der Anfang von g' bilden den Start einer Billiardtrajektorie, denn es gilt 'Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel', wie wiederum Bild 2 illustriert. Diese Gerade g' trifft den Rand der Reflektionskopien einmal

²(Gerichtete) Strecke wäre vielleicht die genauere Bezeichnung, denn diese Geraden haben einen Start- und einen Endpunkt, genau wie Billiardtrajektorien. Der verwendete Begriff als Übersetzung von 'straight line' ist üblich.

weniger als g dies tat. Deswegen endet der Prozess nach endlich vielen Schritten mit einer Billiardtrajektorie in P . $\square$

Wir starten nun mit ersten Beobachtungen, ob, wann und wie viele periodische Billiardtrajektorien es gibt.

Übungsaufgabe 7. *Betrachte ein rechteckiges Polygon mit Seitenlängen 3 (horizontal) und 2 (vertikal). Gibt es eine periodische Trajektorie, die die Seiten des Polygons sechsmal trifft?*

Übungsaufgabe 8. *Betrachte Sie das L-förmige Polygon aus Abbildung 3 rechts oben, wobei die Seite a die Länge 2, die Seite h die Länge 1, die Seite d die Länge 3 und die Seite e die Länge 2 hat. Finden Sie eine periodische Trajektorie, die nicht nur aus horizontalen oder aus vertikalen Segmenten besteht. Finden Sie eine periodische Billiardtrajektorie, deren Entfaltung eine gerade der Steigung 2 ist.*

Weitere Fragen zu periodischen Billiardtrajektorien gibt es in den Aufgaben der Creative Challenge und tiefliegende Sätze dazu gibt es im Fachvortrag.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT, FRANKFURT AM MAIN
Email address: `moeller@math.uni-frankfurt.de`